

---

# Mathematik 3 (Numerik)

---

Zusammenfassung  
Fabian Damken

---



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

---

---

## Inhaltsverzeichnis

---

<b>1 Grundlagen</b>	<b>5</b>
1.1 Vektornorm . . . . .	5
1.2 Induzierte Matrixnormen . . . . .	5
1.3 Konditionszahl . . . . .	6
1.4 Spezielle Matrizen . . . . .	6
1.5 Eigenwerte und Eigenvektoren . . . . .	6
1.5.1 Charakteristisches Polynom . . . . .	6
1.5.2 Eigenschaften . . . . .	7
1.5.3 Diagonalisierbarkeit . . . . .	7
1.6 $\mathcal{O}$ -Notation . . . . .	7
<b>2 Interpolation</b>	<b>8</b>
2.1 Polynominterpolation . . . . .	8
2.1.1 Eindeutigkeit . . . . .	8
2.1.2 Naiver Lösungsansatz . . . . .	8
2.1.3 Lagrange-Interpolation . . . . .	9
2.1.4 Newtonsche Interpolationsformel . . . . .	9
2.1.5 Fehlerabschätzungen . . . . .	10
2.1.6 Runges Phänomen . . . . .	10
2.1.7 Tschebyscheff-Abszissen . . . . .	10
2.2 Spline-Interpolation . . . . .	11
2.2.1 Lineare Splines . . . . .	11
2.2.2 Kubische Splines . . . . .	12
<b>3 Integration</b>	<b>15</b>
3.1 Geschlossene Newton-Cotes-Quadratur . . . . .	15
3.1.1 Spezielle geschlossene Newton-Cotes-Formeln . . . . .	15
3.2 Offene Newton-Cotes-Quadratur . . . . .	16
3.2.1 Spezielle offene Newton-Cotes-Formeln . . . . .	16
3.3 Vergleich Geschlossene vs. Offene Newton-Cotes-Quadratur . . . . .	16
3.4 Summierte Newton-Cotes-Formeln . . . . .	16
3.4.1 Summierte Trapezregel (geschlossen) . . . . .	17
3.4.2 Summierte Simpson-Regel (geschlossen) . . . . .	17
3.4.3 Summierte Rechteck-Regel (offen) . . . . .	17
<b>4 Gewöhnlichen Differentialgleichungen</b>	<b>18</b>
4.1 Existenz- und Eindeutigkeit . . . . .	18
4.2 Numerische Verfahren . . . . .	18
4.2.1 Explizites Euler-Verfahren . . . . .	18
4.2.2 Implizites Euler-Verfahren . . . . .	18
4.2.3 Verfahren von Heun . . . . .	18
4.2.4 Modifiziertes Euler-Verfahren . . . . .	18
4.2.5 Klassisches Runge-Kutta-Verfahren . . . . .	18
4.2.6 Explizite Runge-Kutta-Verfahren und Butcher-Schema . . . . .	18
4.2.7 Implizite Runge-Kutta-Verfahren und Butcher-Schema . . . . .	18

4.3	Konvergenz und Konsistenz . . . . .	18
4.3.1	Konsistenzordnungen . . . . .	19
4.3.2	Konvergenzsatz . . . . .	19
4.4	Steife Differentialgleichungen . . . . .	19
4.4.1	Modellgleichung . . . . .	19
4.4.2	Stabilität . . . . .	19
4.4.3	Stabilitätsgebiete . . . . .	19
<b>5</b>	<b>Lineare Gleichungssysteme</b>	<b>20</b>
5.1	Lösungstheorie . . . . .	20
5.2	Gaußsches Eliminationsverfahren, Dreieckszerlegung . . . . .	20
5.2.1	Lösung gestaffelter Gleichungssysteme . . . . .	20
5.2.2	Gaußsches Eliminationsverfahren . . . . .	20
5.2.3	LR-Zerlegung . . . . .	20
5.2.4	Matrixdarstellung . . . . .	21
5.2.5	Matrixklassen ohne Pivotsuche . . . . .	21
5.3	Cholsky-Verfahren . . . . .	21
5.3.1	Cholsky-Verfahren $\leftrightarrow$ LR-Zerlegung . . . . .	21
5.3.2	Verfahren . . . . .	21
5.3.3	Eigenschaften . . . . .	21
5.4	Fehlerabschätzungen und Rundungsfehlereinfluss . . . . .	21
5.4.1	Fehlerabschätzungen für gestörte Gleichungssysteme . . . . .	21
5.4.2	Rundungsfehleranalyse . . . . .	21
<b>6</b>	<b>Nichtlineare Gleichungssysteme</b>	<b>22</b>
6.1	Newton-Verfahren . . . . .	22
6.1.1	Lokales Newton-Verfahren . . . . .	22
6.1.2	Lokale Konvergenz . . . . .	22
6.1.3	Globalisierung . . . . .	22
<b>7</b>	<b>Eigenwert- und Eigenvektorberechnung</b>	<b>23</b>
7.1	Störungstheorie . . . . .	23
7.2	Gershgorin-Kreise . . . . .	23
7.3	Numerische Verfahren . . . . .	23
7.3.1	Vektoriteration . . . . .	23
7.3.2	QR-Verfahren . . . . .	23





Content . . . . . 22

Content . . . . . 22

Content . . . . . 22

Content . . . . . 22

Content . . . . . 22

Content . . . . . 22

Content . . . . . 22

Content . . . . . 23

Content . . . . . 23

Content . . . . . 23

Content . . . . . 23

Content . . . . . 23

Content . . . . . 23

Content . . . . . 23

Content . . . . . 23

Content . . . . . 23

Content . . . . . 23

Content . . . . . 23

Content . . . . . 23

Content . . . . . 23

Content . . . . . 24

Content . . . . . 24

Content . . . . . 24

Content . . . . . 24

Content . . . . . 24

---

## 1 Grundlagen

---

### 1.1 Vektornorm

---

Eine *Vektornorm* ist eine Abbildung  $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  mit folgenden Eigenschaften:

Definitheit  $\|c\| = 0 \iff c = 0$

Homogenität  $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$  (für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  und alle  $x \in \mathbb{R}^n$ )

Dreiecksungleichung  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$ )

#### Wichtige Normen

$p$ -Norm  $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$

Summennorm  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$   
(1-Norm)

Euklidische Norm  $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x^T x}$   
(2-Norm)

Maximumsnorm  $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$   
( $\infty$ -Norm)

---

### 1.2 Induzierte Matrixnormen

---

Sei  $\|\cdot\|$  eine beliebige Norm auf  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist auf  $\mathbb{R}^{n \times n}$  eine dazugehörige Matrixnorm definiert durch:

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

für jede Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Diese Norm wird *induzierte Matrixnorm* genannt.

Eine solche Norm hat folgende Eigenschaften:

Definitheit  $\|A\| = 0 \iff A = 0$

Homogenität  $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$  (für alle  $\alpha \in \mathbb{R}$  und alle  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ )

Dreiecksungleichung  $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$  (für alle  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ )

Verträglichkeit  $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$  (für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  und alle  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ )

Submultiplikativität  $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$  (für alle  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ )

#### Wichtige Normen

Spaltensummennorm  $\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$   
(1-Norm)

Euklidische Norm  $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$  (mit  $\lambda$  Eigenwert von  $A$ )  
(2-Norm)

Zeilensummennorm  $\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$   
( $\infty$ -Norm)

---

### 1.3 Konditionszahl

---

Sei  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  invertierbar und sei  $\|\cdot\|$  eine induzierte Matrixnorm.

Dann ist

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

die *Konditionszahl* von  $A$  bzgl. der Matrixnorm  $\|\cdot\|$ .

---

### 1.4 Spezielle Matrizen

---

- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ist *hermitesch* gdw.  $A^H = A$ , wobei  $A^H := \overline{A}^T$ .
- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  ist *unität* gdw.  $A^H = A^{-1}$ .
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist *orthogonal* gdw.  $A^T = A^{-1}$ , bzw.  $A^T A = A A^T = I$

---

### 1.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

---

Eine Zahl  $\lambda \in \mathbb{C}$  heißt *Eigenwert* einer Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  gdw. es einen Vektor  $x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$  gibt mit:

$$Ax = \lambda x$$

Ein solcher Vektor wird *Eigenvektor* genannt. Die Menge aller Eigenwerte  $\sigma(A)$  heißt *Spektrum* von  $A$ .  
Der Unterraum

$$\text{Eig}_A(\lambda) := \{x \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda I)x = 0\}$$

wird *Eigenraum* von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$  genannt. Die Dimension

$$\gamma(\lambda) := \dim(\text{Eig}_A(\lambda)) = n - \text{Rang}(A - \lambda I)$$

ist die *geometrische Vielfachheit* von  $\lambda$  und gibt die maximale Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren zu  $\lambda$  an.

---

#### 1.5.1 Charakteristisches Polynom

---

$\lambda$  ist ein Eigenwert von  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  gdw. gilt

$$\mathcal{X}(\lambda) := \det(A - \lambda I) = 0$$

also wenn  $\lambda$  eine Nullstelle des *charakteristischen Polynoms*  $\mathcal{X}$  von  $A$  ist.

Das charakteristische Polynom hat die Linearfaktorzerlegung

$$\mathcal{X}(\mu) = (-1)^n \cdot (\mu - \lambda_1)^{v_1} \cdot \dots \cdot (\mu - \lambda_k)^{v_k}$$

wobei  $v(\lambda_i) = v_i \in \mathbb{N}$  die *algebraische Vielfachheit* von  $\lambda_i$  genannt wird.

---

## 1.5.2 Eigenschaften

---

Sei  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  eine beliebige Matrix, dann gilt:

- $\lambda \in \sigma(A) \implies \lambda \in \sigma(A^T) \wedge \bar{\lambda} \in \sigma(A^H)$
- Für jede reguläre Matrix  $A$  hat die zu  $A$  ähnliche Matrix  $B = T^{-1}AT$  das selbe charakteristische Polynom und die selben Eigenwerte wie  $A$ . Ist  $x$  ein Eigenvektor von  $A$ , dann ist  $y = T^{-1}x$  ein Eigenvektor von  $B$ .
- Ist  $A$  hermitesch, dann hat  $A$  nur reelle Eigenwerte.  
Ist  $A$  unitär, dann gilt  $|\lambda| = 1$  für jeden Eigenwert  $\lambda$ .

---

## 1.5.3 Diagonalisierbarkeit

---

Eine Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  heißt *diagonalisierbar* gdw. sie  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren besitzt.

---

## 1.6 $\mathcal{O}$ -Notation

---

Für eine Funktion  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  bezeichnet  $\mathcal{O}(g(n))$  die Menge aller Funktionen, die asymptotische nicht schneller wachsen als  $g$ , d.h.:

$$\mathcal{O}(g(n)) := \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists n_0 \in \mathbb{N} : \exists c \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$



---

## 2 Interpolation

---

**Gegeben** Funktionaler Zusammenhang  $y = f(x)$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, a < b \in \mathbb{R}$

**Bekannt** Werte  $y_i = f(x_i)$ ,  $i = 0, \dots, n$  (*Stützstellen*)

**Ziel** Annäherung für  $f(x)$  für beliebige  $x \in [a, b]$

**Interpolationsproblem** Suche einfache Ersatzfunktion  $\Phi(x)$  mit  $\Phi(x_i) = y_i$ ,  $i = 0, \dots, n$

**Wunsch** Der Fehler  $|f(x) - \Phi(x)|$  sollte auf  $[a, b]$  möglichst gering sein.

### Interpolationsaufgabe

Zu einer gegebenen Ansatzfunktion  $\Phi(x; a_0, \dots, a_n)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  mit Parametern  $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  sollen zu gegebenen Paaren  $(x_i, y_i)$   $i = 0, \dots, n$  mit  $x_i, y_i \in \mathbb{R}$  und  $x_i \neq x_j$  für  $i \neq j$  sollen die Parameter  $a_0, \dots, a_n$  so bestimmt werden, dass die Interpolationsbedingungen  $\Phi(x_i; a_0, \dots, a_n) = y_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  erfüllt sind. Die Paare  $(x_i, y_i)$  werden als *Stützpunkte* bezeichnet.

---

### 2.1 Polynominterpolation

---

**Ansatzfunktion:** Polynome vom Grad  $\leq n$ , also

$$p_n(x) = \Phi(x, a_0, \dots, a_n) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

**Interpolationsaufgabe:** Finde ein Polynom  $p_n(x)$  vom Grad  $\leq n$ , sodass die Interpolationsbedingungen  $p_n(x_i) = y_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  erfüllt sind.

Anwendungen hierfür sind z.B.:

- Approximation einer Funktion auf einem Intervall
- Inverse Interpolation (Approximation von  $f^{-1}$  bei einer gegebenen Funktion  $f$ )
- Numerische Integration (siehe Kapitel 3)
- Numerische Differentiation

---

#### 2.1.1 Eindeutigkeit

---

Es existiert genau ein Polynom vom Grad  $\leq n$ , welches die Interpolationsbedingungen erfüllt, und zwar  $p_n(x)$ . Die Lösung einer Interpolationsaufgabe ist also eindeutig.

---

#### 2.1.2 Naiver Lösungsansatz

---

Die Interpolationsbedingungen liefern  $n + 1$  Gleichungen, womit sich mit Koeffizienten  $a_0, \dots, a_n$  ein lineares Gleichungssystem aufstellen lässt:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

## Nachteile

- Hoher Rechenaufwand: Das Auflösen des Gleichungssystem benötigt  $\mathcal{O}(n^3)$  Rechenoperationen.
- Die Koeffizientenmatrix (*Vandermonde-Matrix*) ist invertierbar, aber extrem schlecht konditioniert → Rundungsfehler werden dramatisch verstärkt.

---

### 2.1.3 Lagrange-Interpolation

---

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_{k,n}(x) \quad L_{k,n}(x) = \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{x - x_j}{x_k - x_j}$$

Die Lagrange-Polynome  $L_{k,n}$  sind so gewählt, dass:

$$L_{k,n}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } k = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} =: \delta_{ki}$$

wobei  $\delta_{ki}$  das Kronecker-Symbol ist.

## Bewertung

- Vorteile
  - Rechenaufwand:  $\mathcal{O}(n^2)$  zur Koeffizientenberechnung,  $\mathcal{O}(n)$  zur Auswertung von  $p_n(x)$
  - Intuitive Darstellung
- Nachteile
  - Hinzunahme von Stützstellen ist aufwendig.

---

### 2.1.4 Newtonsche Interpolationsformel

---

$$p_n(x) = y_0 + \sum_{i=1}^n \gamma_i (x - x_0) \cdots (x - x_{i-1}) \quad \gamma_i = f_{[x_0, \dots, x_i]}$$

Die Berechnung der Parameter erfolgt über die *dividierten Differenzen*  $f_{[x_0, \dots, x_i]} := \gamma_i$  zu den Stützstellen  $x_0, \dots, x_i$ , wobei  $f_{[x_0]} = \gamma_0 = y_0$ . Allgemein werden die dividierten Differenzen über Rekursion berechnet (die Reihenfolge der  $x_i$  ist dabei irrelevant):

$$j = 0, \dots, n : f_{[x_j]} = y_j$$
$$k = 1, \dots, n, j = 0, \dots, n - k : f_{[x_j, \dots, x_{j+k}]} = \frac{f_{[x_{j+1}, \dots, x_{j+k}]} - f_{[x_j, \dots, x_{j+k-1}]}}{x_{j+k} - x_j}$$

Die Berechnung der dividierten Differenzen kann z.B. mit folgendem Schema erfolgen:

$$\begin{array}{l|l} x_0 & f_{[x_0]} = y_0 \quad \searrow \\ & f_{[x_0, x_1]} \quad \searrow \\ x_1 & f_{[x_1]} = y_1 \quad \swarrow & f_{[x_0, x_1, x_2]} \\ & f_{[x_1, x_2]} \quad \swarrow \\ x_2 & f_{[x_2]} = y_2 \quad \swarrow & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

---

## Vorteile

- Rechenaufwand:  $\mathcal{O}(n^2)$  zur Berechnung der dividierten Differenzen,  $\mathcal{O}(n)$  zur Auswertung von  $p_n(x)$
- Hinzunahme neuer Stützstellen erfordert nur die Berechnung von  $n$  zusätzlichen dividierten Differenzen.

---

### 2.1.5 Fehlerabschätzungen

---

Sei  $f \in C^{n+1}([a, b])$  und  $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$  verschiedene Punkte und sei  $p_n(x)$  das eindeutige Interpolationspolynom vom Grad  $\leq n$  zu den Stützwerten  $(x_i, f(x_i))$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Dann existiert zu jedem  $x \in [a, b]$  ein  $\xi_x \in [a, b]$  mit

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

Mit dem Knotenpolynom

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

gilt für den maximalen Fehler:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |\omega(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Werden keine äquidistanten Stützstellen verwendet sondern Tschebyscheff-Abszissen, so verschärft sich die Fehlerabschätzung zu:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} 2^{-n}$$

---

### 2.1.6 Runges Phänomen

---

Bei äquidistanter Wahl der Stützpunkte, d.h.  $x_i = a + ih$ ,  $h = \frac{b-a}{n}$ , ist i.A. nicht gewährleistet, dass gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) - p_n(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in [a, b]$$

Runges Phänomen beschreibt das Überschwingen des Interpolanten am Rand des Intervalls.

---

### 2.1.7 Tschebyscheff-Abszissen

---

Tschebyscheff-Abszissen dienen der Vermeidung von Runges Phänomen, in dem die Stützstellen nicht äquidistant gewählt werden:

$$x_i = \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{b+a}{2} \quad i = 0, \dots, n$$

Dies liefert den minimalen Wert für  $\max_{x \in [a, b]} |\omega(x)|$ , und zwar:

$$\max_{x \in [a, b]} |\omega(x)| = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} 2^{-n}$$

---

## 2.2 Spline-Interpolation

---

- Motivation: Höhere Anzahl an Stützstellen ergibt nicht immer eine bessere Approximation bei der Polynominterpolation.
- Lösung: Zerlegung von  $[a, b]$  in Teilintervalle und Polynominterpolation auf den Teilintervallen mit  $\text{Grad} \leq k$ .
- Problem: Die Polynome passen an den Intervallgrenzen mglw. nicht zusammen.  
→ Spline-Interpolation: Die Polynome gehen  $k - 1$ -mal stetig ineinander über.

### Splinefunktion

Sei  $\Delta = \{x_i \mid a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  eine Zerlegung des Intervalls  $[a, b]$ , wobei die  $x_i$  *Knoten* genannt werden.

Dann ist eine *Splinefunktion* der Ordnung  $k$  zur Zerlegung  $\Delta$  eine Funktion  $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit folgenden Eigenschaften:

- Es gilt  $s \in C^{k-1}([a, b])$
- $s$  stimmt auf jedem Intervall  $[x_i, x_{i+1}]$  mit einem Polynom  $s_i$  vom Grad  $\leq k$  überein.

Die Menge dieser Splinefunktionen wird mit  $S_{\Delta, k}$  bezeichnet.

Splinefunktionen mit  $k = 1$  werden *Lineare Splines* genannt, Splinefunktionen mit  $k = 3$  werden *Kubische Splines* genannt.

### Interpolationsaufgabe

Bestimme zu einer Zerlegung  $\Delta = \{x_i \mid a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  und Werten  $y_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, \dots, n$  eine Funktion  $s \in S_{\Delta, k}$  mit  $s(x_i) = y_i$ ,  $i = 0, \dots, n$ .

---

#### 2.2.1 Lineare Splines

---

- Ein linearer Spline  $s \in S_{\Delta, 1}$  ist stetig.
- $s$  ist ein Polynom vom Grad  $\leq 1$  auf jedem Intervall  $[x_i, x_{i+1}]$ .
- Die Interpolationsbedingungen ergeben  $s_i(x_i) = y_i$  und  $s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$ .
- Dies legt  $s_i$  fest (Lagrange-Interpolation):

$$s(x) = s_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1} \quad \text{für alle } x \in [x_i, x_{i+1}]$$

---

#### Eindeutigkeit

---

Zu einer Zerlegung  $\Delta$  von  $[a, b]$  und Werten  $y_i$ ,  $i = 0, \dots, n$  existiert genau ein interpolierender linearer Spline.

---

#### Fehlerabschätzung

---

Sei  $f \in C^2([a, b])$ . Dann gilt für jede Zerlegung  $\Delta = \{x_i \mid a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$  von  $[a, b]$  und den interpolierenden Spline  $s \in S_{\Delta, 1}$  von  $f$ :

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{8} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| h_{\max}^2 \quad \text{mit } h_{\max} := \max_{i=0, \dots, n-1} x_{i+1} - x_i$$





---

Für die **hermite Randbedingungen** gelten schärfere Fehlerabschätzungen (sei alles definiert wie oben):

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{5}{384} \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)| h_{\max}^4$$
$$|f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)| \leq \frac{2h_{\max}}{h_{\min}} \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)| h_{\max}^{4-k}$$

### 3 Integration

Gegeben Ein funktionaler Zusammenhang  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Ziel Näherungsweise Bestimmung des Integrals  $\int_a^b f(x) dx$ .

**Integrationsaufgabe:** Zu einem gegebenen, integrierbarem,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , berechne  $I(f) = \int_a^b f(x) dx$ .

#### Exakte Integrationsformel

Eine Integrationsformel  $J(f) = \sum_{i=0}^n \beta_i f(x_i)$  heißt *exakt vom Grad  $n$*  gdw. sie alle Polynome bis mindestens Grad  $n$  exakt integriert.

#### 3.1 Geschlossene Newton-Cotes-Quadratur

$$I_n(f) = h \sum_{k=0}^n \alpha_{k,n} f(x_k) \quad \alpha_{k,n} = \int_0^n \prod_{j=0, j \neq k}^n \frac{s-j}{k-j} ds \quad h = \frac{b-a}{n} \quad x_k = a + kh$$

- Die Werte  $\alpha_{0,n}, \dots, \alpha_{n,n}$  heißen *Gewichte*.
- Diese sind unabhängig von  $f$  und  $[a, b]$  und somit tabellierbar.
- Es gilt immer:

$$h \sum_{k=0}^n \alpha_{k,n} = b - a, \quad \text{also} \quad \sum_{k=0}^n \alpha_{k,n} = n$$

- Die geschlossene Newton-Cotes-Formel  $I(f)$  ist exakt vom Grad  $n$ .

#### Fehlerabschätzung

Für ein  $\xi \in [a, b]$  gilt für den Fehler  $E_n(f) := I(f) - I_n(f)$ :

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \int_a^b p_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - p_n(x)| dx \leq \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} (b-a)^{n+2}$$

#### 3.1.1 Spezielle geschlossene Newton-Cotes-Formeln

$n$	$h$	$\alpha_{k,n}$				max. Fehler $E_n(f)$	Name	
1	$b-a$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			$-\frac{f^{(2)}(\xi)}{12} h^3$	Trapezregel	
2	$\frac{b-a}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$		$-\frac{f^{(4)}(\xi)}{90} h^5$	Simpson-Regel	
3	$\frac{b-a}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{3f^{(4)}(\xi)}{80} h^5$	3/8-Regel	
4	$\frac{b-a}{4}$	$\frac{14}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{24}{45}$	$\frac{64}{45}$	$\frac{14}{45}$	$-\frac{8f^{(6)}(\xi)}{945} h^7$	Milne-Regel

**Tabelle 3.1:** Geschlossene Newton-Cotes-Formeln

Ab  $n \geq 7$  treten negative Gewichte auf, weshalb das Verfahren zunehmend numerisch instabil wird.



### 3.2 Offene Newton-Cotes-Quadratur

$$\tilde{I}_n(f) = h \sum_{k=1}^{n+1} \tilde{\alpha}_{k,n} f(x_k) \quad \tilde{\alpha}_{k,n} = \int_0^{n+2} \prod_{j=1, j \neq k}^{n+1} \frac{s-j}{k-j} ds \quad h = \frac{b-a}{n+2} \quad x_k = a + kh$$

#### 3.2.1 Spezielle offene Newton-Cotes-Formeln

$n$	$h$	$\tilde{\alpha}_{k,n}$		max. Fehler $\tilde{E}_n(f)$	Name
0				$\frac{b-a}{2} \frac{f^{(2)}(\xi)}{3} h^3$	Rechteck-Regel
1	$b-a$	$-\frac{f^{(2)}(\xi)}{12} h^3$	Trapezregel	$\frac{b-a}{3} \frac{3f^{(2)}(\xi)}{4} h^3$	
2	$\frac{b-a}{2}$	$-\frac{f^{(4)}(\xi)}{90} h^5$	Simpson-Regel	$\frac{b-a}{4} \frac{28f^{(4)}(\xi)}{90} h^5$	
3	$\frac{b-a}{3}$	$-\frac{3f^{(4)}(\xi)}{80} h^5$	3/8-Regel		
4	$\frac{b-a}{4}$	$-\frac{8f^{(6)}(\xi)}{945} h^7$	Milne-Regel		

Tabelle 3.2: Offene Newton-Cotes-Formeln

- Vorteil offener Formeln: kleineres  $h$  bei gleichem  $n$ .
- Die Fehlerordnung von  $n = 1$  ist wie bei  $n = 0$ , also kein zusätzlicher Nutzen.
- Ab  $n \geq 2$  können negative Gewichte auftreten  $\implies$  Numerisch instabil.
- Somit ist nur die Rechteck-Regel empfehlenswert.

### 3.3 Vergleich Geschlossene vs. Offene Newton-Cotes-Quadratur

$n$	geschlossen			offen		
	$h$	$\tilde{E}_n(f)$	Name	$h$	$E_n(f)$	Name
0				$\frac{b-a}{2}$	$\frac{f^{(2)}(\xi)}{3} h^3$	Rechteck-Regel
1	$b-a$	$-\frac{f^{(2)}(\xi)}{12} h^3$	Trapezregel	$\frac{b-a}{3}$	$\frac{3f^{(2)}(\xi)}{4} h^3$	
2	$\frac{b-a}{2}$	$-\frac{f^{(4)}(\xi)}{90} h^5$	Simpson-Regel	$\frac{b-a}{4}$	$\frac{28f^{(4)}(\xi)}{90} h^5$	
3	$\frac{b-a}{3}$	$-\frac{3f^{(4)}(\xi)}{80} h^5$	3/8-Regel			
4	$\frac{b-a}{4}$	$-\frac{8f^{(6)}(\xi)}{945} h^7$	Milne-Regel			

Tabelle 3.3: Vergleich: Offene/Geschlossene Newton-Cotes-Quadratur

### 3.4 Summierte Newton-Cotes-Formeln

- Problematik: Die Newton-Cotes-Formeln liefern nur genaue Ergebnisse, wenn das Integrationsintervall klein und die Anzahl der Knoten nicht zu groß ist.
- Idee: Zerlege  $[a, b]$  in  $m$  Teilintervalle der Länge  $H = \frac{b-a}{m}$ :

$$y_j = a + jH, \quad j = 0, \dots, m$$

- Es gilt:

$$I(f) = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x) dx$$

- Wende nun die Newton-Cotes-Formel vom Grad  $n$  einzeln auf die Teilintervalle an und summiere das Ergebnis.

$$S_N^{(n)}(f) = h \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^n \alpha_{i,n} f(x_{jn+i}) \quad x_k = a + kh \quad h = \frac{b-a}{N} \quad N = nm$$

Die Gewichte  $\alpha_{i,n}$  sind die Gewichte der geschlossenen Newton-Cotes-Formel.  
Der Quadraturfehler

$$R_N^{(n)}(f) = I(f) - S_N^{(n)}(f)$$

ergibt sich durch Summierung der Fehler auf den Teilintervallen.

### 3.4.1 Summierte Trapezregel (geschlossen)

$$S_N^{(1)}(f) = \frac{h}{2} \sum_{j=0}^{m-1} (f(x_j) + f(x_{j+1})) \quad x_j = a + jh \quad h = \frac{b-a}{m}$$

Fehler:  $R_N^{(1)}(f) = -\frac{f''(\xi)}{12}(b-a)h^2$

### 3.4.2 Summierte Simpson-Regel (geschlossen)

$$S_N^{(2)}(f) = \frac{h}{3} \sum_{j=0}^{m-1} (f(x_{2j}) + 4f(x_{2j+1}) + f(x_{2j+2})) \quad x_j = a + jh \quad h = \frac{b-a}{2m}$$

Fehler:  $R_N^{(2)}(f) = -\frac{f^{(4)}(\xi)}{180}(b-a)h^4$

### 3.4.3 Summierte Rechteck-Regel (offen)

$$\tilde{S}_N^{(0)}(f) = 2h \sum_{j=1}^m f(x_{2j-1}) \quad x_j = a + jh \quad h = \frac{b-a}{N}$$

Fehler:  $\tilde{R}_N^{(0)}(f) = \frac{f''(\xi)}{6}(b-a)h^2$

---

---

## 4 Gewöhnlichen Differentialgleichungen

---

---

---

### 4.1 Existenz- und Eindeutigkeit

---

---

---

### 4.2 Numerische Verfahren

---

---

---

#### 4.2.1 Explizites Euler-Verfahren

---

---

---

#### 4.2.2 Implizites Euler-Verfahren

---

---

---

#### 4.2.3 Verfahren von Heun

---

---

---

#### 4.2.4 Modifiziertes Euler-Verfahren

---

---

---

#### 4.2.5 Klassisches Runge-Kutta-Verfahren

---

---

---

#### 4.2.6 Explizite Runge-Kutta-Verfahren und Butcher-Schema

---

---

---

#### 4.2.7 Implizite Runge-Kutta-Verfahren und Butcher-Schema

---

---

---

### 4.3 Konvergenz und Konsistenz

---

---

Content

---

Content

---

Content

---

Content

---

Content

---

Content

---

Content

---

Content

---

Content

---

Content

---

Content

---

---

### 4.3.1 Konsistenzordnungen

---

---

---

Konsistenzordnungen von Runge-Kutta-Verfahren

---

---

---

### 4.3.2 Konvergenzsatz

---

---

---

## 4.4 Steife Differentialgleichungen

---

---

---

### 4.4.1 Modellgleichung

---

---

---

### 4.4.2 Stabilität

---

---

---

### 4.4.3 Stabilitätsgebiete

---

---

---

Explizites Euler-Verfahren

---

---

---

Implizites Euler-Verfahren

---

---

---

Klassisches Runge-Kutta-Verfahren

---

---

---

Implizite Trapezregel

---

---

---

Content

---

---

Content

---

---

Content

---

---

Content

---

---

Content

---

---

Content

---

---

Content

---

---

Content

---

---

Content

---

---

Content

---

---

Content

---

---

## 5 Lineare Gleichungssysteme

---

---

---

### 5.1 Lösungstheorie

---

---

---

### 5.2 Gaußsches Eliminationsverfahren, Dreieckszerlegung

---

---

---

#### 5.2.1 Lösung gestaffelter Gleichungssysteme

---

---

---

#### 5.2.2 Gaußsches Eliminationsverfahren

---

---

---

Grundkonzept

---

---

---

Pivotstrategie

---

---

---

#### Spaltenpivotsuche

---

---

---

#### Vollständige Pivotsuche

---

---

---

Algorithmen

---

---

---

#### 5.2.3 LR-Zerlegung

---

---

---

Vollständige Pivotsuche

---

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

---

---

## 5.2.4 Matrixdarstellung

---

---

Content

---

## 5.2.5 Matrixklassen ohne Pivotsuche

---

---

Content

---

## 5.3 Cholsky-Verfahren

---

---

Content

---

### 5.3.1 Cholsky-Verfahren $\leftrightarrow$ LR-Zerlegung

---

---

Content

---

### 5.3.2 Verfahren

---

---

Content

---

### 5.3.3 Eigenschaften

---

---

Content

---

## 5.4 Fehlerabschätzungen und Rundungsfehlereinfluss

---

---

Content

---

### 5.4.1 Fehlerabschätzungen für gestörte Gleichungssysteme

---

---

Content

---

### 5.4.2 Rundungsfehleranalyse

---

---

Content

---

#### Spaltenpivotsuche

---

---

Content

---

#### Vollständige Pivotsuche

---

---

Content

---

---

## 6 Nichtlineare Gleichungssysteme

---

---

---

### 6.1 Newton-Verfahren

---

---

---

#### 6.1.1 Lokales Newton-Verfahren

---

---

---

#### 6.1.2 Lokale Konvergenz

---

---

---

#### 6.1.3 Globalisierung

---

---

---

Schrittweitenwahl nach Armijo

---

---

---

Globalisiertes Newton-Verfahren

---

---

---

Globale Konvergenz

---

---

Content

---

Content

---

Content

---

Content

---

Content

---

Content

---

Content

---

Content

---

---

## 7 Eigenwert- und Eigenvektorberechnung

---

---

---

### 7.1 Störungstheorie

---

---

---

### 7.2 Gershgorin-Kreise

---

---

---

### 7.3 Numerische Verfahren

---

---

---

#### 7.3.1 Vektoriteration

---

---

---

Konvergenz

---

---

---

Vektoriteration von Mises

---

---

---

Vektoriteration von Wiedlandt

---

---

---

Inverse Vektoriteration von Wiedlandt

---

---

---

#### 7.3.2 QR-Verfahren

---

---

---

Grundlegende Eigenschaften

---

---

---

Content

---

---

Content

---

---

Content

---

---

Content

---

---

Content

---

---

Content

---

---

Content

---

---

Content

---

---

Content

---

---

Content

---

---

Content





---

Konvergenz

---

 Content

---

Shift-Techniken

---

 Content

**Verbreitete Shift-Strategie**

 Content

**Berechnung der Eigenvektoren**

 Content

---

Householder-Verfahren zur Berechnung

---

 Content