
Mathematik 3 (Numerik)

Zusammenfassung
Fabian Damken



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	5
1.1	Vektornorm	5
1.2	Induzierte Matrixnormen	5
1.3	Konditionszahl	6
1.4	Spezielle Matrizen	6
1.5	Eigenwerte und Eigenvektoren	6
1.5.1	Charakteristisches Polynom	6
1.5.2	Eigenschaften	7
1.5.3	Diagonalisierbarkeit	7
1.6	\mathcal{O} -Notation	7
2	Interpolation	8
2.1	Polynominterpolation	8
2.1.1	Eindeutigkeit	8
2.1.2	Naiver Lösungsansatz	8
2.1.3	Lagrange-Interpolation	9
2.1.4	Newtonsche Interpolationsformel	9
2.1.5	Fehlerabschätzungen	10
2.1.6	Runges Phänomen	10
2.1.7	Tschebyscheff-Abszissen	10
2.2	Spline-Interpolation	11
2.2.1	Lineare Splines	11
2.2.2	Kubische Splines	12
3	Integration	15
3.1	Geschlossene Newton-Cotes-Quadratur	15
3.2	Offene Newton-Cotes-Quadratur	15
3.3	Vergleich Geschlossene vs. Offene Newton-Cotes-Quadratur	15
3.4	Summierte Newton-Cotes-Formeln	15
3.4.1	Summierte Trapezregel (geschlossen)	15
3.4.2	Summierte Simpson-Regel (geschlossen)	15
3.4.3	Summierte Rechteck-Regel (offen)	15
4	Gewöhnlichen Differentialgleichungen	16
4.1	Existenz- und Eindeutigkeit	16
4.2	Numerische Verfahren	16
4.2.1	Explizites Euler-Verfahren	16
4.2.2	Implizites Euler-Verfahren	16
4.2.3	Verfahren von Heun	16
4.2.4	Modifiziertes Euler-Verfahren	16
4.2.5	Klassisches Runge-Kutta-Verfahren	16
4.2.6	Explizite Runge-Kutta-Verfahren und Butcher-Schema	16
4.2.7	Implizite Runge-Kutta-Verfahren und Butcher-Schema	16
4.3	Konvergenz und Konsistenz	16
4.3.1	Konsistenzordnungen	17

4.3.2	Konvergenzsatz	17
4.4	Steife Differentialgleichungen	17
4.4.1	Modellgleichung	17
4.4.2	Stabilität	17
4.4.3	Stabilitätsgebiete	17
5	Lineare Gleichungssysteme	18
5.1	Lösungstheorie	18
5.2	Gaußsches Eliminationsverfahren, Dreieckszerlegung	18
5.2.1	Lösung gestaffelter Gleichungssysteme	18
5.2.2	Gaußsches Eliminationsverfahren	18
5.2.3	LR-Zerlegung	18
5.2.4	Matrixdarstellung	19
5.2.5	Matrixklassen ohne Pivotsuche	19
5.3	Cholsky-Verfahren	19
5.3.1	Cholsky-Verfahren \leftrightarrow LR-Zerlegung	19
5.3.2	Verfahren	19
5.3.3	Eigenschaften	19
5.4	Fehlerabschätzungen und Rundungsfehlereinfluss	19
5.4.1	Fehlerabschätzungen für gestörte Gleichungssysteme	19
5.4.2	Rundungsfehleranalyse	19
6	Nichtlineare Gleichungssysteme	20
6.1	Newton-Verfahren	20
6.1.1	Lokales Newton-Verfahren	20
6.1.2	Lokale Konvergenz	20
6.1.3	Globalisierung	20
7	Eigenwert- und Eigenvektorberechnung	21
7.1	Störungstheorie	21
7.2	Gershgorin-Kreise	21
7.3	Numerische Verfahren	21
7.3.1	Vektoriteration	21
7.3.2	QR-Verfahren	21

Todo list

Content	15
Content	15
Content	15
Content	15
Content	15
Content	15
Content	15
Content	15
Content	16
Content	16
Content	16
Content	16
Content	16
Content	16
Content	16
Content	16
Content	16
Content	16
Content	16
Content	16
Content	16
Content	16
Content	17
Content	17
Content	17
Content	17
Content	17
Content	17
Content	17
Content	17
Content	17
Content	17
Content	17
Content	17
Content	17
Content	17
Content	17
Content	17
Content	17
Content	17
Content	17
Content	18
Content	18
Content	18
Content	18
Content	18
Content	18
Content	18
Content	18
Content	18
Content	18
Content	18
Content	18
Content	18
Content	18
Content	18
Content	18
Content	18
Content	18
Content	18
Content	19
Content	19
Content	19
Content	19



Content	19
Content	19
Content	19
Content	19
Content	19
Content	19
Content	19
Content	20
Content	20
Content	20
Content	20
Content	20
Content	20
Content	20
Content	20
Content	21
Content	21
Content	21
Content	21
Content	21
Content	21
Content	21
Content	21
Content	21
Content	21
Content	21
Content	21
Content	21
Content	22
Content	22
Content	22
Content	22
Content	22

1 Grundlagen

1.1 Vektornorm

Eine *Vektornorm* ist eine Abbildung $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit folgenden Eigenschaften:

Definitheit $\|c\| = 0 \iff c = 0$

Homogenität $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ (für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$)

Dreiecksungleichung $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$)

Wichtige Normen

p -Norm $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}$

Summennorm $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
(1-Norm)

Euklidische Norm $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{x^T x}$
(2-Norm)

Maximumsnorm $\|x\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$
(∞ -Norm)

1.2 Induzierte Matrixnormen

Sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf \mathbb{R}^n . Dann ist auf $\mathbb{R}^{n \times n}$ eine dazugehörige Matrixnorm definiert durch:

$$\|A\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

für jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Diese Norm wird *induzierte Matrixnorm* genannt.

Eine solche Norm hat folgende Eigenschaften:

Definitheit $\|A\| = 0 \iff A = 0$

Homogenität $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ (für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

Dreiecksungleichung $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ (für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

Verträglichkeit $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$ (für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

Submultiplikativität $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ (für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$)

Wichtige Normen

Spaltensummennorm $\|A\|_1 = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$
(1-Norm)

Euklidische Norm $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$ (mit λ Eigenwert von A)
(2-Norm)

Zeilensummennorm $\|A\|_\infty = \max_{i=1, \dots, n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$
(∞ -Norm)

1.3 Konditionszahl

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar und sei $\|\cdot\|$ eine induzierte Matrixnorm.

Dann ist

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

die *Konditionszahl* von A bzgl. der Matrixnorm $\|\cdot\|$.

1.4 Spezielle Matrizen

- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist *hermitesch* gdw. $A^H = A$, wobei $A^H := \overline{A}^T$.
- $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist *unität* gdw. $A^H = A^{-1}$.
- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist *orthogonal* gdw. $A^T = A^{-1}$, bzw. $A^T A = A A^T = I$

1.5 Eigenwerte und Eigenvektoren

Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt *Eigenwert* einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gdw. es einen Vektor $x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$ gibt mit:

$$Ax = \lambda x$$

Ein solcher Vektor wird *Eigenvektor* genannt. Die Menge aller Eigenwerte $\sigma(A)$ heißt *Spektrum* von A .
Der Unterraum

$$\text{Eig}_A(\lambda) := \{x \in \mathbb{C}^n \mid (A - \lambda I)x = 0\}$$

wird *Eigenraum* von A zum Eigenwert λ genannt. Die Dimension

$$\gamma(\lambda) := \dim(\text{Eig}_A(\lambda)) = n - \text{Rang}(A - \lambda I)$$

ist die *geometrische Vielfachheit* von λ und gibt die maximale Anzahl linear unabhängiger Eigenvektoren zu λ an.

1.5.1 Charakteristisches Polynom

λ ist ein Eigenwert von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gdw. gilt

$$\mathcal{X}(\lambda) := \det(A - \lambda I) = 0$$

also wenn λ eine Nullstelle des *charakteristischen Polynoms* \mathcal{X} von A ist.

Das charakteristische Polynom hat die Linearfaktorzerlegung

$$\mathcal{X}(\mu) = (-1)^n \cdot (\mu - \lambda_1)^{v_1} \cdot \dots \cdot (\mu - \lambda_k)^{v_k}$$

wobei $v(\lambda_i) = v_i \in \mathbb{N}$ die *algebraische Vielfachheit* von λ_i genannt wird.

1.5.2 Eigenschaften

Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine beliebige Matrix, dann gilt:

- $\lambda \in \sigma(A) \implies \lambda \in \sigma(A^T) \wedge \bar{\lambda} \in \sigma(A^H)$
- Für jede reguläre Matrix A hat die zu A ähnliche Matrix $B = T^{-1}AT$ das selbe charakteristische Polynom und die selben Eigenwerte wie A . Ist x ein Eigenvektor von A , dann ist $y = T^{-1}x$ ein Eigenvektor von B .
- Ist A hermitesch, dann hat A nur reelle Eigenwerte.
Ist A unitär, dann gilt $|\lambda| = 1$ für jeden Eigenwert λ .

1.5.3 Diagonalisierbarkeit

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt *diagonalisierbar* gdw. sie n linear unabhängige Eigenvektoren besitzt.

1.6 \mathcal{O} -Notation

Für eine Funktion $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet $\mathcal{O}(g(n))$ die Menge aller Funktionen, die asymptotische nicht schneller wachsen als g , d.h.:

$$\mathcal{O}(g(n)) := \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R} \mid \exists n_0 \in \mathbb{N} : \exists c \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : f(n) \leq c \cdot g(n)\}$$

2 Interpolation

Gegeben Funktionaler Zusammenhang $y = f(x)$, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, a < b \in \mathbb{R}$

Bekannt Werte $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$ (*Stützstellen*)

Ziel Annäherung für $f(x)$ für beliebige $x \in [a, b]$

Interpolationsproblem Suche einfache Ersatzfunktion $\Phi(x)$ mit $\Phi(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$

Wunsch Der Fehler $|f(x) - \Phi(x)|$ sollte auf $[a, b]$ möglichst gering sein.

Interpolationsaufgabe

Zu einer gegebenen Ansatzfunktion $\Phi(x; a_0, \dots, a_n)$, $x \in \mathbb{R}$ mit Parametern $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sollen zu gegebenen Paaren (x_i, y_i) $i = 0, \dots, n$ mit $x_i, y_i \in \mathbb{R}$ und $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ sollen die Parameter a_0, \dots, a_n so bestimmt werden, dass die Interpolationsbedingungen $\Phi(x_i; a_0, \dots, a_n) = y_i$, $i = 0, \dots, n$ erfüllt sind. Die Paare (x_i, y_i) werden als *Stützpunkte* bezeichnet.

2.1 Polynominterpolation

Ansatzfunktion: Polynome vom Grad $\leq n$, also

$$p_n(x) = \Phi(x, a_0, \dots, a_n) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

Interpolationsaufgabe: Finde ein Polynom $p_n(x)$ vom Grad $\leq n$, sodass die Interpolationsbedingungen $p_n(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$ erfüllt sind.

Anwendungen hierfür sind z.B.:

- Approximation einer Funktion auf einem Intervall
- Inverse Interpolation (Approximation von f^{-1} bei einer gegebenen Funktion f)
- Numerische Integration (siehe Kapitel 3)
- Numerische Differentiation

2.1.1 Eindeutigkeit

Es existiert genau ein Polynom vom Grad $\leq n$, welches die Interpolationsbedingungen erfüllt, und zwar $p_n(x)$. Die Lösung einer Interpolationsaufgabe ist also eindeutig.

2.1.2 Naiver Lösungsansatz

Die Interpolationsbedingungen liefern $n + 1$ Gleichungen, womit sich mit Koeffizienten a_0, \dots, a_n ein lineares Gleichungssystem aufstellen lässt:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Vorteile

- Rechenaufwand: $\mathcal{O}(n^2)$ zur Berechnung der dividierten Differenzen, $\mathcal{O}(n)$ zur Auswertung von $p_n(x)$
- Hinzunahme neuer Stützstellen erfordert nur die Berechnung von n zusätzlichen dividierten Differenzen

2.1.5 Fehlerabschätzungen

Sei $f \in C^{n+1}([a, b])$ und $x_0, \dots, x_n \in [a, b]$ verschiedene Punkte und sei $p_n(x)$ das eindeutige Interpolationspolynom vom Grad $\leq n$ zu den Stützwerten $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \dots, n$. Dann existiert zu jedem $x \in [a, b]$ ein $\xi_x \in [a, b]$ mit

$$f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!} (x - x_0) \cdots (x - x_n)$$

Mit dem Knotenpolynom

$$\omega(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$$

gilt für den maximalen Fehler:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |\omega(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Werden keine äquidistanten Stützstellen verwendet sondern Tschebyscheff-Abszissen, so verschärft sich die Fehlerabschätzung zu:

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| \leq \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} 2^{-n}$$

2.1.6 Runges Phänomen

Bei äquidistanter Wahl der Stützpunkte, d.h. $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$, ist i.A. nicht gewährleistet, dass gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x) - p_n(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in [a, b]$$

Runges Phänomen beschreibt das Überschwingen des Interpolanten am Rand des Intervalls.

2.1.7 Tschebyscheff-Abszissen

Tschebyscheff-Abszissen dienen der Vermeidung von Runges Phänomen, in dem die Stützstellen nicht äquidistant gewählt werden:

$$x_i = \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{n+1} \cdot \frac{\pi}{2}\right) + \frac{b+a}{2} \quad i = 0, \dots, n$$

Dies liefert den minimalen Wert für $\max_{x \in [a, b]} |\omega(x)|$, und zwar:

$$\max_{x \in [a, b]} |\omega(x)| = \left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1} 2^{-n}$$

2.2 Spline-Interpolation

- Motivation: Höhere Anzahl an Stützstellen ergibt nicht immer eine bessere Approximation bei der Polynominterpolation.
- Lösung: Zerlegung von $[a, b]$ in Teilintervalle und Polynominterpolation auf den Teilintervallen mit Grad $\leq k$.
- Problem: Die Polynome passen an den Intervallgrenzen mglw. nicht zusammen.
→ Spline-Interpolation: Die Polynome gehen $k - 1$ -mal stetig ineinander über.

Splinefunktion

Sei $\Delta = \{x_i \mid a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$, wobei die x_i *Knoten* genannt werden.

Dann ist eine *Splinefunktion* der Ordnung k zur Zerlegung Δ eine Funktion $s : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- Es gilt $s \in C^{k-1}([a, b])$
- s stimmt auf jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ mit einem Polynom s_i vom Grad $\leq k$ überein.

Die Menge dieser Splinefunktionen wird mit $S_{\Delta, k}$ bezeichnet.

Splinefunktionen mit $k = 1$ werden *Lineare Splines* genannt, Splinefunktionen mit $k = 3$ werden *Kubische Splines* genannt.

Interpolationsaufgabe

Bestimme zu einer Zerlegung $\Delta = \{x_i \mid a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ und Werten $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, n$ eine Funktion $s \in S_{\Delta, k}$ mit $s(x_i) = y_i$, $i = 0, \dots, n$.

2.2.1 Lineare Splines

- Ein linearer Spline $s \in S_{\Delta, 1}$ ist stetig
- s ist ein Polynom vom Grad ≤ 1 auf jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$
- Die Interpolationsbedingungen ergeben $s_i(x_i) = y_i$ und $s_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$
- Dies legt s_i fest (Lagrange-Interpolation):

$$s(x) = s_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} y_i + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} y_{i+1} \quad \text{für alle } x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Eindeutigkeit

Zu einer Zerlegung Δ von $[a, b]$ und Werten y_i , $i = 0, \dots, n$ existiert genau ein interpolierender linearer Spline.

Fehlerabschätzung

Sei $f \in C^2([a, b])$. Dann gilt für jede Zerlegung $\Delta = \{x_i \mid a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b\}$ von $[a, b]$ und den interpolierenden Spline $s \in S_{\Delta, 1}$ von f :

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - s(x)| \leq \frac{1}{8} \max_{x \in [a, b]} |f''(x)| h_{\max}^2 \quad \text{mit } h_{\max} := \max_{i=0, \dots, n-1} x_{i+1} - x_i$$

- Hermite Randbedingungen:

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \frac{h_0}{3} \\ \mu_n &= \frac{h_{n-1}}{3} \\ \lambda_0 &= \frac{h_0}{6} \\ \lambda_n &= \frac{h_{n-1}}{6} \\ b_0 &= \frac{y_1 - y_0}{h_0} - f'(a) \\ b_n &= f'(b) - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}\end{aligned}$$

Natürliche Randbedingungen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & \\ \frac{h_0}{6} & \frac{h_0+h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \frac{h_{i-1}}{6} & \frac{h_{i-1}+h_i}{3} & \frac{h_i}{6} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2}+h_{n-1}}{3} & \frac{h_{n-1}}{6} \\ & & & & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \vdots \\ \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}} \\ \vdots \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hermite Randbedingungen:

$$\begin{bmatrix} \frac{h_0}{3} & \frac{h_0}{6} & & & & & \\ \frac{h_0}{6} & \frac{h_0+h_1}{3} & \frac{h_1}{6} & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \frac{h_{i-1}}{6} & \frac{h_{i-1}+h_i}{3} & \frac{h_i}{6} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \frac{h_{n-2}}{6} & \frac{h_{n-2}+h_{n-1}}{3} & \frac{h_{n-1}}{6} \\ & & & & & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_{n-1}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y_1-y_0}{h_0} - f'(a) \\ \frac{y_2-y_1}{h_1} - \frac{y_1-y_0}{h_0} \\ \vdots \\ \frac{y_{i+1}-y_i}{h_i} - \frac{y_i-y_{i-1}}{h_{i-1}} \\ \vdots \\ \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{y_{n-1}-y_{n-2}}{h_{n-2}} \\ f'(b) - \frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}} \end{bmatrix}$$

Fehlerabschätzung

Seien $h_{\min} := \min_{i=0, \dots, n-1} h_i$ und $h_{\max} := \max_{i=0, \dots, n-1} h_i$.

Dann gilt für $f \in C^4([a, b])$ mit $f''(a) = f''(b) = 0$ und jede Unterteilung Δ , $y_i = f(x_i)$ und dem kubischen Spline-Interpolanten $s \in S_{\Delta,3}$ zu den **natürlichen Randbedingungen** und $k = 1, 2$:

$$\begin{aligned}|f(x) - s(x)| &\leq \frac{h_{\max}}{h_{\min}} \sup_{\xi \in [a, b]} |f^{(4)}(\xi)| h_{\max}^4 \\ |f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)| &\leq \frac{2h_{\max}}{h_{\min}} \sup_{\xi \in [a, b]} |f^{(4)}(\xi)| h_{\max}^{4-k}\end{aligned}$$

Für die **hermite Randbedingungen** gelten schärfere Fehlerabschätzungen (sei alles definiert wie oben):

$$|f(x) - s(x)| \leq \frac{5}{384} \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)| h_{\max}^4$$
$$|f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)| \leq \frac{2h_{\max}}{h_{\min}} \sup_{\xi \in [a,b]} |f^{(4)}(\xi)| h_{\max}^{4-k}$$

3 Integration

3.1 Geschlossene Newton-Cotes-Quadratur

Content

3.2 Offene Newton-Cotes-Quadratur

Content

3.3 Vergleich Geschlossene vs. Offene Newton-Cotes-Quadratur

Content

3.4 Summierte Newton-Cotes-Formeln

Content

3.4.1 Summierte Trapezregel (geschlossen)

Content

3.4.2 Summierte Simpson-Regel (geschlossen)

Content

3.4.3 Summierte Rechteck-Regel (offen)

Content

Content

4 Gewöhnlichen Differentialgleichungen

4.1 Existenz- und Eindeutigkeit

4.2 Numerische Verfahren

4.2.1 Explizites Euler-Verfahren

4.2.2 Implizites Euler-Verfahren

4.2.3 Verfahren von Heun

4.2.4 Modifiziertes Euler-Verfahren

4.2.5 Klassisches Runge-Kutta-Verfahren

4.2.6 Explizite Runge-Kutta-Verfahren und Butcher-Schema

4.2.7 Implizite Runge-Kutta-Verfahren und Butcher-Schema

4.3 Konvergenz und Konsistenz

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

4.3.1 Konsistenzordnungen

Konsistenzordnungen von Runge-Kutta-Verfahren

4.3.2 Konvergenzsatz

4.4 Steife Differentialgleichungen

4.4.1 Modellgleichung

4.4.2 Stabilität

4.4.3 Stabilitätsgebiete

Explizites Euler-Verfahren

Implizites Euler-Verfahren

Klassisches Runge-Kutta-Verfahren

Implizite Trapezregel

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

5 Lineare Gleichungssysteme

5.1 Lösungstheorie

5.2 Gaußsches Eliminationsverfahren, Dreieckszerlegung

5.2.1 Lösung gestaffelter Gleichungssysteme

5.2.2 Gaußsches Eliminationsverfahren

Grundkonzept

Pivotstrategie

Spaltenpivotsuche

Vollständige Pivotsuche

Algorithmen

5.2.3 LR-Zerlegung

Vollständige Pivotsuche

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

5.2.4 Matrixdarstellung

Content

5.2.5 Matrixklassen ohne Pivotsuche

Content

5.3 Cholsky-Verfahren

Content

5.3.1 Cholsky-Verfahren \leftrightarrow LR-Zerlegung

Content

5.3.2 Verfahren

Content

5.3.3 Eigenschaften

Content

5.4 Fehlerabschätzungen und Rundungsfehlereinfluss

Content

5.4.1 Fehlerabschätzungen für gestörte Gleichungssysteme

Content

5.4.2 Rundungsfehleranalyse

Content

Spaltenpivotsuche

Content

Vollständige Pivotsuche

Content

6 Nichtlineare Gleichungssysteme

6.1 Newton-Verfahren

6.1.1 Lokales Newton-Verfahren

6.1.2 Lokale Konvergenz

6.1.3 Globalisierung

Schrittweitenwahl nach Armijo

Globalisiertes Newton-Verfahren

Globale Konvergenz

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

7 Eigenwert- und Eigenvektorberechnung

7.1 Störungstheorie

7.2 Gershgorin-Kreise

7.3 Numerische Verfahren

7.3.1 Vektoriteration

Konvergenz

Vektoriteration von Mises

Vektoriteration von Wiedlandt

Inverse Vektoriteration von Wiedlandt

7.3.2 QR-Verfahren

Grundlegende Eigenschaften

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content

Content



Konvergenz

 Content

Shift-Techniken

 Content

Verbreitete Shift-Strategie

 Content

Berechnung der Eigenvektoren

 Content

Householder-Verfahren zur Berechnung

 Content